

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

GRADO EN ARQUITECTURA NAVAL E
INGENIERÍA DE SISTEMAS MARINOS

MATEMÁTICAS II

Apuntes de teoría, ejemplos prácticos y
ejercicios resueltos para ingeniería.

Autor: DAVID CONESA PAGÁN

Curso Académico 2025 / 2026
1.ª Edición (Revisada)

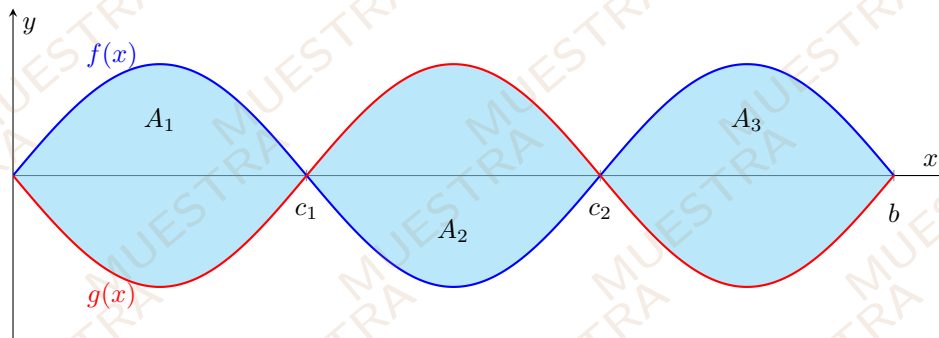
ESTE EJEMPLAR PERTENECE AL ALUMNO/A:

.....

El uso de este material es personal e intransferible. Su identificador único está vinculado al portador.

1.3. Aplicaciones

1.3.1. Cálculo de áreas



Definición 1.6 (Cálculo de áreas entre curvas)

Los pasos a seguir para calcular el área entre dos curvas $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ son:

1. **Identificar la posición relativa:** Determinar qué función actúa como límite superior ("techo") y cuál como límite inferior ("suelo") dentro del intervalo.
2. **Calcular los puntos de intersección:** Igualar ambas funciones ($f(x) = g(x)$) para averiguar si se cruzan. Esto nos permite determinar los límites de integración exactos en caso de que haya que dividir el intervalo original $[a, b]$.
3. **Partir el intervalo:** Dividir $[a, b]$ en subintervalos en los que una función se mantenga estrictamente por encima de la otra. Para garantizar que el área sea siempre positiva sin importar los cruces, podemos integrar el valor absoluto de su diferencia.

Es decir, de forma general y asumiendo por ejemplo que $g(x) \geq f(x)$ en un tramo $[a, b]$, se cumple que:

$$\text{Área} = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

Observación 1.13 (¿Qué pasa si la función es negativa?)

Si la función $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x) dx$ también será negativa, lo que no tiene sentido en el contexto de cálculo de áreas. Para solucionar esto, debemos usar el valor absoluto de la función dentro de la integral (es decir, restar "techo menos suelo", donde el techo es el eje $y = 0$):

$$A = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^b (0 - f(x)) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

Observación 1.14 (¿Qué pasa si $f(x)$ cruza el eje x y se vuelve negativa?)

En este caso, debemos dividir el intervalo en partes donde la función sea positiva y partes donde sea negativa. Luego, aplicamos la aditividad respecto al intervalo para integrar cada parte por separado, usando el valor absoluto (restar $0 - f(x)$) para las partes negativas.

Por ejemplo, si la función cruza el eje en un punto c (siendo positiva hasta c y negativa después):

$$A = \int_a^b |f(x) - 0| dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b (0 - f(x)) dx$$

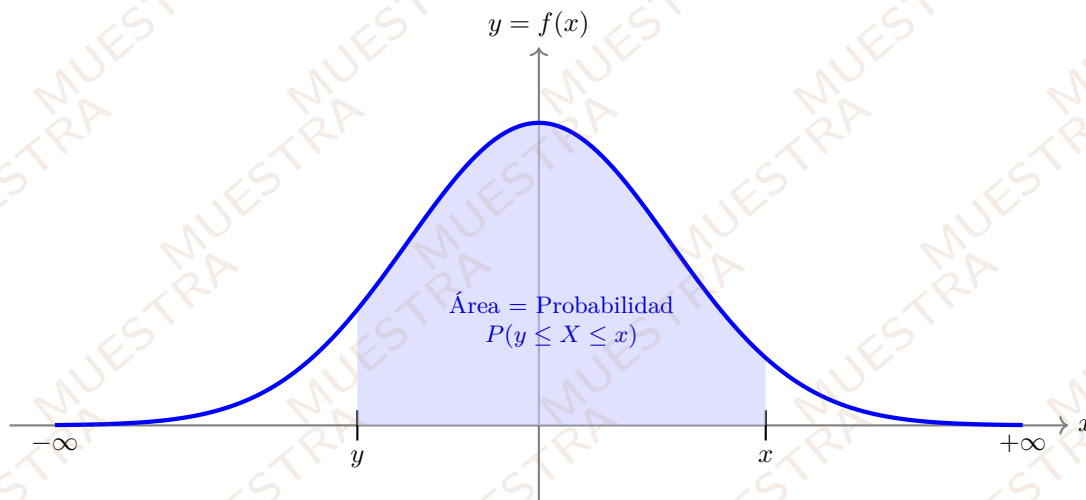
1.3.6. Cálculo de probabilidades de distribuciones continuas

Definición 1.7 (Función de Densidad de Probabilidad)

Para que una función $y = f(x)$ sea considerada una **función de densidad de probabilidad** de una variable aleatoria continua, debe cumplir obligatoriamente dos propiedades:

1. Ser no negativa en todo su dominio: $f(x) \geq 0$
2. El área total bajo la curva debe ser exactamente 1 (el 100 % de probabilidad):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$



Observación 1.16 (Función de Distribución y Sucesos)

La probabilidad de que ocurra un suceso menor o igual a un valor x viene dada por la **función de distribución de probabilidad**, denotada como $F(x)$. Se calcula integrando la función de densidad desde el menos infinito hasta el punto x :

$$Pr(\text{suceso} \leq x) = F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

(Nota: Se usa t dentro de la integral como variable muda para no confundirla con el límite x).

Si queremos calcular la probabilidad de que el suceso ocurra en un intervalo concreto entre dos valores y y x (con $y < x$), restamos sus funciones de distribución, lo que equivale a la integral definida entre esos dos puntos:

$$F(x) - F(y) = \int_{-\infty}^x f(t) dt - \int_{-\infty}^y f(t) dt = \int_y^x f(t) dt$$

Teorema 2.14 (Regla de Simpson 3/8 (Simple))

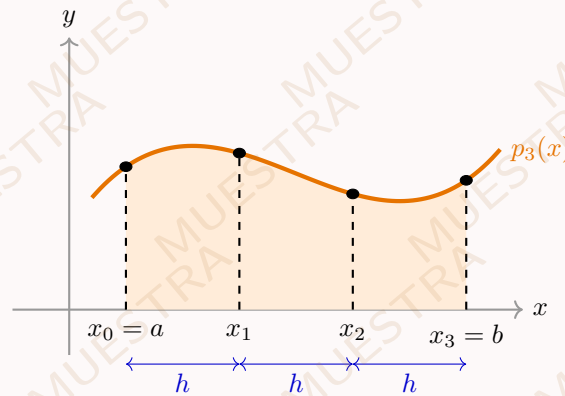
La Regla de Simpson de 3/8 es una variante que, en lugar de aproximar la función con una parábola, utiliza un **polinomio interpolador de grado 3** (cúbico), denotado como $\bar{p}_3(x)$.

Para definir un polinomio de grado 3 necesitamos exactamente 4 puntos. Por tanto, dividimos el intervalo de integración $[a, b]$ en **3 subintervalos iguales**, obteniendo el siguiente paso:

$$h = \frac{b-a}{3}$$

Los cuatro nodos equiespaciados resultantes son:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad x_3 = b$$



Al integrar este polinomio cúbico analíticamente en el intervalo completo, obtenemos la fórmula exacta de la aproximación:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b \bar{p}_3(x) dx \\ &= \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \end{aligned}$$

Nota de uso: Esta regla se reconoce fácilmente por su vector de coeficientes (1, 3, 3, 1) escalado por el factor exterior $3h/8$.

Teorema 2.15 (Fórmula del Error de Simpson 3/8 y su Uso Práctico)

El error asociado a la aproximación mediante la Regla de Simpson 3/8 simple viene dado por:

$$E_{S3/8}(f, [a, b]) = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b \bar{p}_3(x) dx = -\frac{3h^5}{80} f^{(iv)}(\mu) \quad \mu \in (a, b)$$

Aplicación Práctica (El problema de las tablas de datos):

Recordemos que el Método de Simpson 1/3 requiere dividir el dominio en un número **par de subintervalos**. Esto significa que necesitamos obligatoriamente un número **impar de puntos/nodos** (ej: 3, 5, 7, 9...).

Sin embargo, en la ingeniería naval es muy común que nos den tabulados un **número par de puntos** (ej: 4, 6, 8...). Al tener un número par de puntos, tenemos un número impar de subintervalos, por lo que ¡no podemos agruparlos todos en parábolas (de 2 en 2 subintervalos)!.

Solución:

La Regla de Simpson 3/8 "rescata" estos casos. Como Simpson 3/8 consume exactamente **3 subintervalos** (4 puntos), se aplica un bloque de 3/8 a un extremo de la función, y los subintervalos restantes (que ya serán pares) se integran usando la regla de Simpson 1/3 tradicional.

Proposición 4.1 (Dirección de máximo crecimiento)

Evaluable en un punto (x_0, y_0) , el vector $\nabla f(x_0, y_0)$ apunta en la dirección en la que la función **crece** más rápidamente.

Su vector opuesto, $-\nabla f(x_0, y_0)$, indica la dirección de **máximo decrecimiento**.

Proposición 4.2 (Plano tangente a una superficie)

El gradiente permite construir el plano tangente a una superficie definida explícitamente por $z = f(x, y)$ en un punto $(x_0, y_0) \in \Omega$. Su ecuación es:

$$f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

O, de forma más compacta, usando el producto escalar:

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

Ejemplo. Calculad el plano tangente a la superficie $z = x^2 + y^2$ en el punto $(1/2, 1/2)$.

Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$. Calculamos el plano tangente en $P_0(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad \nabla f(x, y) = (2x, 2y)$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = (1, 1)$$

Por tanto, el plano tangente viene dado por:

$$z = \frac{1}{2} + (1, 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}, y - \frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} - \frac{1}{2}$$



- Superficie: $z = x^2 + y^2$
- Plano tangente: $z = x + y - \frac{1}{2}$
- Punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

4.7. Optimización de Funciones de Varias Variables

Para encontrar y clasificar los extremos (máximos y mínimos) de una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, seguimos un proceso basado en sus derivadas.

Definición 4.19 (Puntos Críticos (Condición Necesaria))

Un punto (x_0, y_0) es un **punto crítico** (o candidato a extremo relativo) si anula el gradiente de la función. Es decir, sus derivadas parciales de primer orden deben ser cero simultáneamente:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0) \implies \begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Teorema 4.8 (Polinomio de Taylor y la Matriz Hessiana)

Para saber qué ocurre exactamente en un punto crítico (x_0, y_0) , analizamos el Polinomio de Taylor de orden 2 a su alrededor:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \underbrace{f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}_{\text{Esto es 0 porque es un punto crítico}} + \text{Términos de orden 2}$$

Al desaparecer la parte lineal, la forma de la superficie depende enteramente de los términos cuadráticos (parabólicos), los cuales se organizan en la **Matriz Hessiana**:

$$Hf(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Observación 4.9 (Casos Modelo de Puntos Críticos)

Existen tres comportamientos básicos en el origen $(0, 0)$ dependiendo de la forma cuadrática:

- **Mínimo relativo:** $f_1(x, y) = x^2 + y^2$ (Forma de cuenco hacia arriba).
- **Máximo relativo:** $f_2(x, y) = -(x^2 + y^2)$ (Forma de campana hacia abajo).
- **Punto de silla:** $f_3(x, y) = x^2 - y^2$ (Forma de silla de montar de caballo).

Proposición 4.17 (Clasificación de Extremos (Criterio de Sylvester))

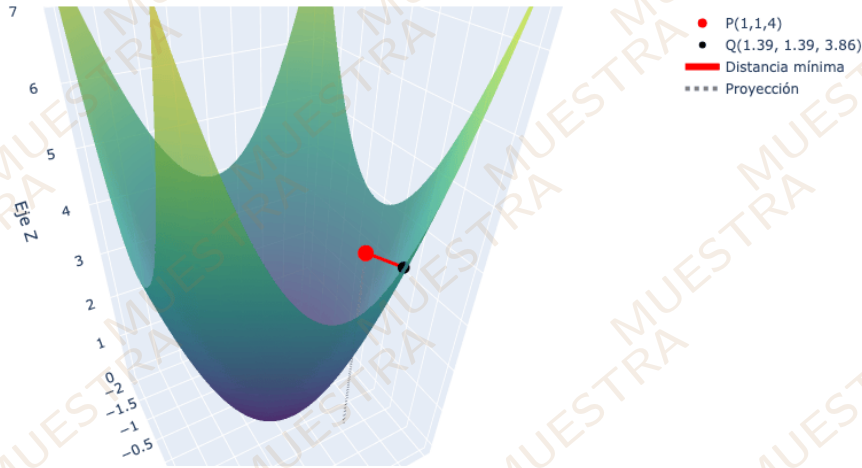
Sea (x_0, y_0) un punto crítico de f . Evaluamos la matriz Hessiana en dicho punto y calculamos sus menores principales:

- El determinante del Hessiano: $\Delta_2 = |Hf(x_0, y_0)| = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$
- El primer elemento de la diagonal: $\Delta_1 = f_{xx}(x_0, y_0)$

La clasificación se determina del siguiente modo:

- Si $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_1 > 0 \implies f$ tiene un **Mínimo relativo** en (x_0, y_0) .
- Si $\Delta_2 > 0$ y $\Delta_1 < 0 \implies f$ tiene un **Máximo relativo** en (x_0, y_0) .
- Si $\Delta_2 < 0 \implies f$ tiene un **Punto de silla** en (x_0, y_0) .
- Si $\Delta_2 = 0 \implies$ El test es inconcluso (hay que usar otros métodos).

Para una mayor se ha realizado un análisis gráfico en 3D, donde se observa el paraboloide y el punto $P(1, 1, 4)$, así como la línea que representa la distancia mínima entre ambos. Este tipo de visualización es fundamental para comprender intuitivamente la naturaleza del problema de optimización con restricciones en espacios de más de dos dimensiones.



Ejemplo. Mínima distancia del punto $(5, 7)$ a la elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

1. Planteamiento de la Función Objetivo

La distancia de cualquier punto (x, y) al punto $(5, 7)$ es:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 7)^2}$$

Para simplificar los cálculos, minimizamos el cuadrado de la distancia:

$$f(x, y) = d^2(x, y) = (x - 5)^2 + (y - 7)^2$$

La restricción es que el punto debe pertenecer a la elipse:

$$g(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$$

2. Método de los Multiplicadores de Lagrange

Definimos la función auxiliar o Lagrangiano:

$$F(x, y, \lambda) = (x - 5)^2 + (y - 7)^2 + \lambda \left(\frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \right)$$

Calculamos sus derivadas parciales y las igualamos a cero:

$$\begin{cases} F_x = 2(x - 5) + \lambda \frac{x}{2} = 0 \implies 4(x - 5) + \lambda x = 0 \implies \lambda x = 20 - 4x \implies \lambda = \frac{20 - 4x}{x} & (x \neq 0) \\ F_y = 2(y - 7) + 2\lambda y = 0 \implies 2y - 14 + 2\lambda y = 0 \implies 2\lambda y = 14 - 2y \implies \lambda = \frac{7 - y}{y} & (y \neq 0) \\ F_\lambda = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0 \implies \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Resolución del Sistema

Iguualamos las dos expresiones obtenidas para λ :

$$\frac{20 - 4x}{x} = \frac{7 - y}{y}$$

Multiplicamos en cruz para despejar:

$$y(20 - 4x) = x(7 - y) \implies 20y - 4xy = 7x - xy$$

3. Método 2: Integración en Orden YX (Láminas horizontales)

Al proyectar sobre el eje Y, el recinto se divide en dos subrecintos $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, ya que la "pared" derecha cambia en $y = c$.

Recinto inferior Ω_1 (Triángulo):

$$\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq c, \quad 0 \leq x \leq y\}$$

$$\iint_{\Omega_1} 5 \, dx \, dy = 5 \int_0^c \left(\int_0^y 1 \, dx \right) dy = 5 \int_0^c y \, dy = \frac{5c^2}{2}$$

Recinto superior Ω_2 (Cúpula parabólica):

$$\Omega_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq 10, \quad 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{10-y}{4}} \right\}$$

$$\iint_{\Omega_2} 5 \, dx \, dy = 5 \int_c^{10} \sqrt{\frac{10-y}{4}} \, dy = \frac{5}{2} \int_c^{10} \sqrt{10-y} \, dy$$

Aplicamos el cambio $t = 10 - y \implies dt = -dy$:

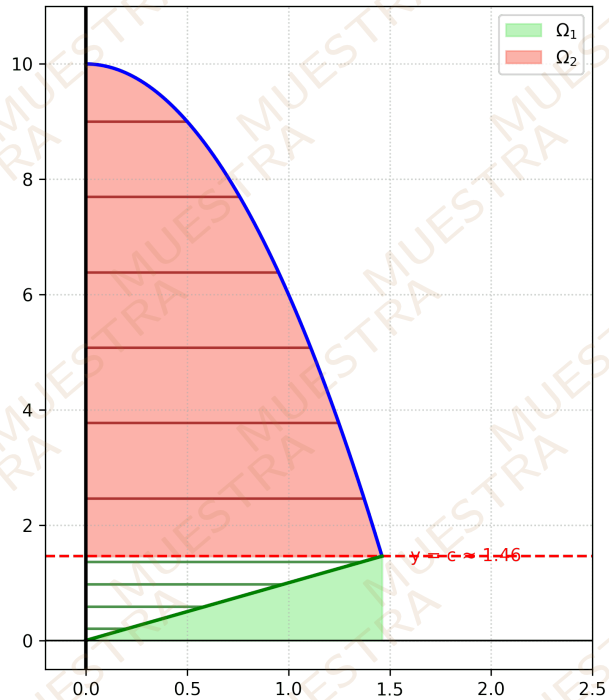
$$\frac{5}{2} \int_0^{10-c} \sqrt{t} \, dt = \frac{5}{2} \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_0^{10-c} = \frac{5}{3} (10-c)^{3/2}$$

Resultado final por este método (suma de ambas):

$$\text{Masa} = \frac{5c^2}{2} + \frac{5}{3}(10-c)^{3/2}$$

Nota: Ambos métodos arrojan exactamente el mismo valor numérico de la masa, aproximándose a 46,93 kg.

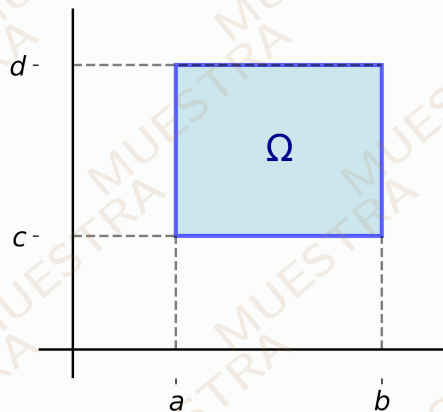
Orden YX: Partición de Ω



Observación 5.3 (Caso de integración en un rectángulo (Variables separables))

Sea el recinto rectangular $\Omega = [a, b] \times [c, d]$. Si la función integrando se puede factorizar como el producto de dos funciones de una sola variable, es decir, $f(x, y) = g(x)h(y)$, entonces la integral doble se puede separar en el producto de dos integrales definidas simples.

Recinto rectangular Ω



Demostración:

Por el Teorema de Fubini, sabemos que podemos integrar en cualquier orden:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy$$

Observación 5.7 (El Jacobiano en Coordenadas Esféricas)

El cambio a coordenadas esféricas es fundamental para integrar recintos con simetría esférica (esferas, conos, casquetes). La convención matemática habitual para la transformación es:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

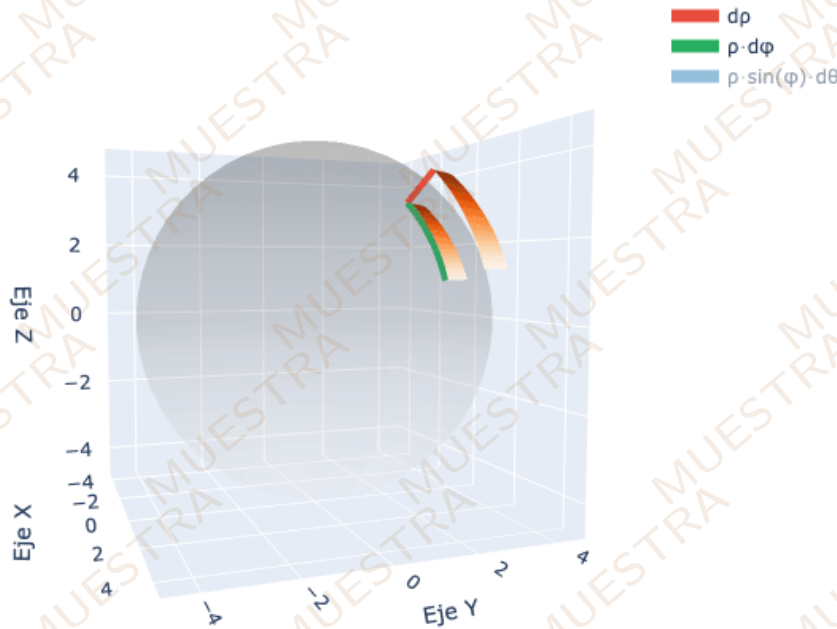
$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Donde $\rho \geq 0$ es la distancia al origen, $\theta \in [0, 2\pi]$ es el ángulo azimutal (en el plano xy), y $\phi \in [0, \pi]$ es el ángulo polar (desde el eje z positivo).

El determinante Jacobiano de esta transformación tridimensional es:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} \right| = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

**Interpretación Geométrica:**

Si tomamos un pequeño incremento en las tres variables ($d\rho, d\theta, d\phi$), en el plano paramétrico tenemos un cubo perfecto de volumen $d\rho d\theta d\phi$. Sin embargo, al proyectarlo al espacio real (x, y, z) , ese cubo se deforma convirtiéndose en una *cuña esférica*. Las longitudes de las aristas de esta cuña son:

- Arista radial: Simplemente el incremento del radio, $d\rho$.
- Arista latitudinal (movimiento en ϕ): Un arco de circunferencia de radio ρ , cuya longitud es $\rho d\phi$.
- Arista longitudinal (movimiento en θ): Un arco de circunferencia, pero su radio de giro no es ρ , sino la distancia al eje z , que por trigonometría es $\rho \sin \phi$. Su longitud es $\rho \sin \phi d\theta$.

El volumen de esta cuña es el producto de sus tres aristas perpendiculares:

$$dV = (d\rho) \cdot (\rho d\phi) \cdot (\rho \sin \phi d\theta) = \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

Ese es exactamente el factor Jacobiano que aparece en la integral.

6.4. Teorema de Stokes

Teorema 6.3 (Teorema de Stokes)

Sea S una superficie orientada, suave a trozos, y sea $Fr(S)$ su frontera formada por una o varias curvas cerradas. Si $\mathbf{F}$ es un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$, entonces:

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{Fr(S)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Siempre que las orientaciones de la superficie y de la frontera sean **compatibles**.

La analogía del Señor Stokes: Para que las orientaciones sean compatibles, imagina a un muñeco caminando por el borde de la superficie $Fr(S)$.

- Su **cabeza** debe apuntar en la dirección del vector normal exterior $\mathbf{N}$.
- Lleva un palo en su **mano izquierda**.
- Debe caminar en el sentido en el que el palo de su mano izquierda apunte **hacia el interior de la superficie** (y no hacia el vacío).



Corolario 6.4 (El Teorema de Green como caso particular de Stokes)

Si aplicamos el teorema de Stokes a un disco o región plana D apoyada en el suelo (plano xy , donde $z = 0$), su vector normal es trivialmente $\mathbf{N} = (0, 0, 1)$. Tomemos un campo bidimensional $\mathbf{F} = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ y una frontera γ recorrida en sentido antihorario.

Primero, calculamos el rotacional de $\mathbf{F}$:

$$\text{rot}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x, y) & Q(x, y) & 0 \end{vmatrix} = \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

A continuación, aplicamos la integral de superficie de Stokes sustituyendo $d\mathbf{S} = \mathbf{N} \, dxdy$:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left\langle \left(0, 0, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), (0, 0, 1) \right\rangle dxdy$$

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Recuperando de forma exacta la fórmula del Teorema de Green.