

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

GRADO EN ARQUITECTURA NAVAL E
INGENIERÍA DE SISTEMAS MARINOS

MATEMÁTICAS I

Apuntes de teoría, ejemplos prácticos y
ejercicios resueltos para ingeniería.

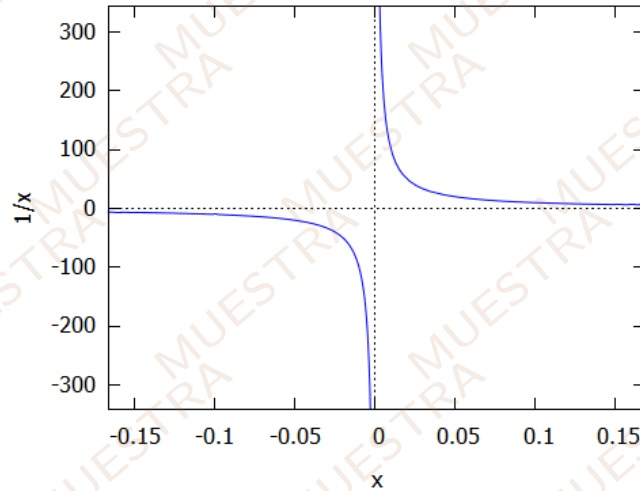
Autor: DAVID CONESA PAGÁN

Curso Académico 2025 / 2026
1.ª Edición (Revisada)

ESTE EJEMPLAR PERTENECE AL ALUMNO/A:

.....

El uso de este material es personal e intransferible. Su identificador único está vinculado al portador.



Son por tanto decrecientes, y tienden a 0 cuando $x \rightarrow +\infty$ y a $+\infty$ cuando $x \rightarrow 0$.

Nuevamente, si $\alpha = \frac{m}{n}$ con n impar, la función también está definida en $(-\infty, 0)$.

1.2.2. Funciones exponenciales y logarítmicas

Dado $a > 0$, se define la función exponencial de base a como

$$f(x) = a^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Su función inversa es el logaritmo en base a , $\log_a(x)$, que viene definida por las igualdades:

$$\log_a(a^x) = x, \quad a^{\log_a(x)} = x.$$

$$y = \log_a(x) \iff a^y = x, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0.$$

Propiedades aritméticas:

Potencias	Logaritmos
$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$
$a^{x+y} = a^x a^y$	$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
$(a^x)^y = a^{xy}$	$\log_a(x^r) = r \log_a(x)$
$a^{\frac{x}{y}} = \frac{a^x}{a^y}$	$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

Si tomamos $b > 0$ como otra base, se cumple:

$$b^x = a^{\log_a(b^x)} = a^{x \log_a(b)},$$

es decir, dos exponenciales están relacionadas por una homotecia en la variable independiente.

Asimismo,

$$\log_a(x) = \log_a(b^{\log_b(x)}) = \log_b(x) \log_a(b),$$

o sea,

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

Por tanto, las funciones logarítmicas respecto de bases diferentes son proporcionales, y se conviene en trabajar en una única base: el número

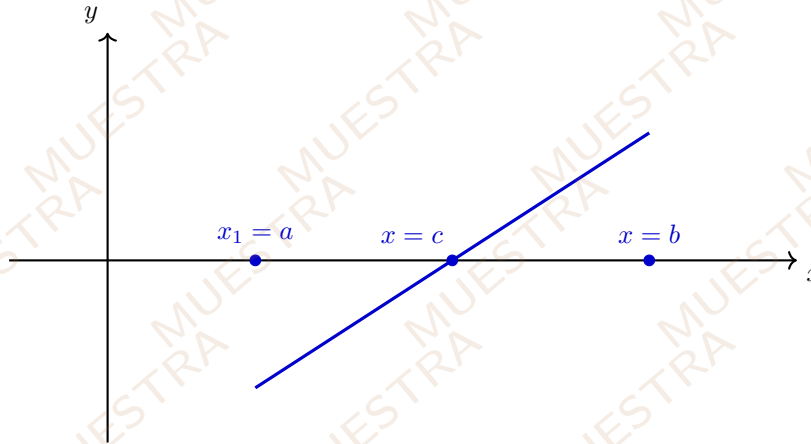
$$e = 2,718281828459045 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

De ahora en adelante, la función exponencial será

$$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R},$$

Teorema 1.3.6. (Bolzano)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



Este teorema es útil para calcular raíces de funciones de las que carecemos un método para hallarlas de forma exacta, una vez tenemos esos dos valores a y b , procedemos a calcular un punto $c = \frac{a+b}{2}$, o sea el punto medio del intervalo y comprobar su signo, dependiendo de como sea, acotaremos la solución $x \in (a, c)$ o $x \in (c, b)$ tal que $f(x) = 0$, y así sucesivamente hasta tener una solución lo que queramos de aproximada.

En los próximos temas veremos unos métodos (Newton-Raphson o secante) en los cuales usaremos al principio este método para conseguir una solución mucho más aproximada con menos esfuerzo.

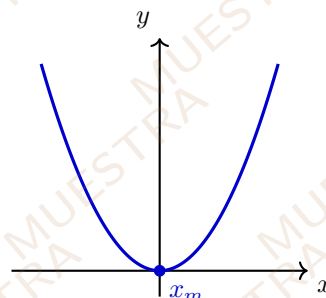
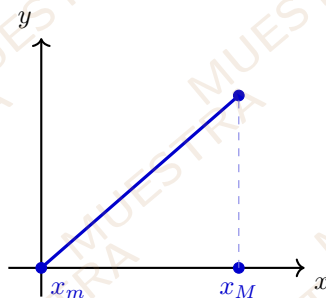
Definición 1.3.7.

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $\exists x_0 \in A : M = f(x_0) \geq f(x), \forall x \in A$, se dice que M es el máximo absoluto de f (en A) y que se alcanza en x_0 .
2. Si $\exists x_0 \in A : m = f(x_0) \leq f(x), \forall x \in A$, se dice que m es el mínimo absoluto de f (en A) y que se alcanza en x_0 .

Si tenemos $f(x) = x$, definida en $\mathbb{R}$, sabemos que no alcanza ni máximo ni mínimo absoluto, pero si la acotamos en el recinto $[0, 1]$, alcanza su mínimo absoluto en $x_m = 0$ y su máximo absoluto en $x_M = 1$.

Lo algo similar con $f(x) = x^2$, si la definimos en $\mathbb{R}$, alcanza un mínimo absoluto en $x_m = 0$, pero carece de máximos absolutos.

**Teorema 1.3.8. (Weierstrass)**

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, f alcanza máximo y mínimo absoluto en $[a, b]$.

1.5. Derivada de Funciones Reales de Variable Real

Definición 1.5.1.

Una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un intervalo abierto I de $\mathbb{R}$ se dice que es *derivable en* $a \in I$ si existe:

$$f'(a) \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

El valor de $f'(a)$ recibe el nombre de derivada de f en a y es frecuente llamar a $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *cociente incremental* de f en a .

La ecuación de la recta secante (que la veremos más transformada en la función tangente o recta tangente) es:

$$S \equiv y - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) \implies y - f(a) = m(x - a)$$

Siendo m la pendiente.

Definición 1.5.2.

Existen diferentes nomenclaturas para especificar la derivada de una función, cabe recalcar que las siguientes, son solo cuando la función f depende de una única variable, si hay más variables estaría mal.

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{df}{dx}(x) = \dot{f}(x)$$

Cabe destacar que la nomenclatura $\dot{f}$ se solía ver en física, aunque cada vez se usa menos, por lo que no es relevante.

Proposición 1.5.3.

Si f es derivable, entonces f es continua, pero que f sea continua, no implica que f sea derivable. En un punto $x = a$, si f es derivable, entonces f es continua en $x = a$.

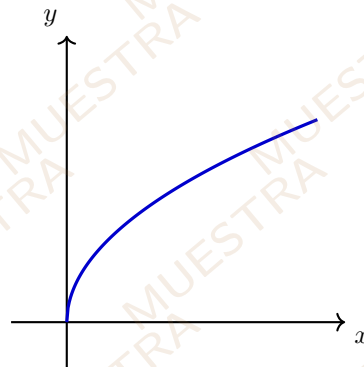
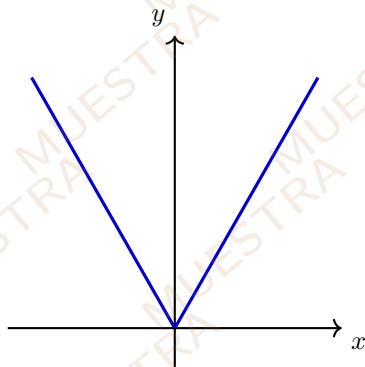
Sabemos que $f(x) = |x|$ es continua en todo $\mathbb{R}$, pero por ello no implica que sea derivable, concretamente en $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{h} = \begin{cases} \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-h}{h} = -1 = f'_-(0) \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{+h}{h} = +1 = f'_+(0) \end{cases}$$

Otra función podría ser $g(x) = \sqrt{x}$, definida en $[0, +\infty)$, en este caso en $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Aquí es absurdo plantear los límites laterales puesto que no podemos tomar raíces con índice par con radicando negativo, y como podemos observar, a la derecha del 0 nos vamos a $+\infty$, pues no es derivable tampoco.



Ejercicio: Estudiar la iteración $x_{n+1} = g(x_n)$ **con** $x \geq 0$

$$g(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} - x + 1$$

Vamos a encontrar los puntos fijos de $g(x)$ y a clasificar su convergencia.

Paso 1: Localizar los puntos fijos

Buscamos los puntos fijos p que cumplen $g(p) = p$. Esto es equivalente a encontrar los ceros (raíces) de la función $f(x) = g(x) - x$.

$$f(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} - x + 1 \right) - x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} - 2x + 1$$

Para encontrar los ceros de $f(x)$ para $x \geq 0$, estudiamos sus extremos (máximos y mínimos) usando su derivada.

$$f'(x) = x^2 + \frac{x}{4} - 2$$

Igualemos $f'(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos:

$$x^2 + \frac{x}{4} - 2 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$:

$$x = \frac{-0'25 \pm \sqrt{(0'25)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \frac{-0'25 \pm \sqrt{0'0625 + 8}}{2} \approx \frac{-0'25 \pm 2'839}{2}$$

Obtenemos dos puntos críticos: $x \approx -1'54$ (se descarta, ya que $x \geq 0$) y $x \approx 1'29$.

Ahora, analizamos el comportamiento de $f(x)$ usando el Teorema de Bolzano:

- $f(0) = 1$ (Positivo)
- $f(1'29) \approx \frac{(1'29)^3}{3} + \frac{(1'29)^2}{8} - 2(1'29) + 1 \approx 0'716 + 0'208 - 2'58 + 1 \approx -0'65$ (Negativo)
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (Positivo)

El análisis nos dice que $f(x)$ (y por tanto los puntos fijos) corta el eje x en dos sitios:

- **Un punto fijo** $p_1 \in [0, 1'29]$. (Por tanteo con Bolzano, $f(0'5) > 0$ y $f(0'7) < 0$, así que $p_1 \in [0'5, 0'7]$).
- **Un punto fijo** $p_2 \in [1'29, \infty]$. (Por tanteo con Bolzano, $f(1'9) < 0$ y $f(2) > 0$, así que $p_2 \in [1'9, 2]$).

Paso 2: Analizar el primer punto fijo $p_1 \in [0, 5, 0, 7]$ (Atractor)

Para que la iteración converja, necesitamos que $g(x)$ sea una aplicación contractiva en un intervalo I que contenga a p_1 . Comprobamos las dos condiciones en $I = [0, 5, 0, 7]$.

Condición 1: $g(x)$ es una contracción ($|g'(x)| < 1$)

- Calculamos la derivada de $g(x)$:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} - x + 1 \right) = x^2 + \frac{x}{4} - 1$$

- Estudiamos la monotonía de $g'(x)$ con su derivada, $g''(x)$:

$$g''(x) = 2x + \frac{1}{4}$$

Definición (Subespacio Ortogonal)

Sea H un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Se define el **subespacio ortogonal** a H como el conjunto de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ que son perpendiculares a todos los vectores de H :

$$H^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot h = 0 \quad \forall h \in H\}$$

Proposición (Relación Generadores-Ecuaciones)

La relación entre H y $H^\perp$ permite intercambiar generadores por ecuaciones:

1. **De Generadores a Ecuaciones:** Si H viene dado por sus generadores $H = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$, entonces las **ecuaciones implícitas** de $H^\perp$ se obtienen poniendo dichos vectores como filas de la matriz del sistema:

$$H^\perp \equiv \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_k & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

2. **De Ecuaciones a Generadores:** Si H viene dado por sus ecuaciones implícitas $AX = 0$, donde las filas de A son los vectores $v_1, \dots, v_k$:

$$H \equiv \begin{pmatrix} - & v_1 & - \\ & \vdots & \\ - & v_k & - \end{pmatrix} X = 0$$

Entonces, los vectores **generadores** de $H^\perp$ son precisamente esas filas:

$$H^\perp = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$$

Consecuencia (Dimensiones): Además, los vectores generadores son base si y solo si las ecuaciones son independientes. Esto implica que las dimensiones son complementarias:

$$\dim(H^\perp) = n - \dim(H)$$

$$\mathbb{R}^n = H \oplus H^\perp$$

Ejercicio Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta $H = \langle (1, 3) \rangle$.

El vector generador es $(1, 3)$. Su ortogonal tiene ecuación implícita $1x + 3y = 0$.

Un vector que cumple esto es $(-3, 1)$.

$$H^\perp = \langle (-3, 1) \rangle \quad \text{o equivalentemente} \quad H^\perp \equiv x + 3y = 0$$

Ejercicio Sea en $\mathbb{R}^3$ el plano $H \equiv x - y - 4z = 0$.

El subespacio H está dado por su ecuación implícita. Los coeficientes de la ecuación forman el vector normal (generador del ortogonal).

$$H^\perp = \langle (1, -1, -4) \rangle$$

Ejercicio Sea en $\mathbb{R}^3$, $H \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 2y + z = 0 \end{cases}$

H está definido por la intersección de dos planos (es una recta).

El subespacio ortogonal $H^\perp$ está generado por los vectores normales de esos planos (los coeficientes de las ecuaciones).

$$H^\perp = \langle (1, 1, -1), (2, 2, 1) \rangle$$

Ejercicio Sea en $\mathbb{R}^3$, $H \equiv x + y - 4z = 0$.

Al igual que en el ejercicio 2, tomamos los coeficientes de la ecuación implícita para formar el generador del ortogonal.

$$H^\perp = \langle (1, 1, -4) \rangle$$

Teorema (Descomposición Ortogonal)

Sea $H \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial.

Todo vector $u \in \mathbb{R}^n$ se puede escribir de manera **única** como suma de un vector en H y otro en su ortogonal:

$$u = \underbrace{P_u}_H + \underbrace{P_u^\perp}_{H^\perp}$$

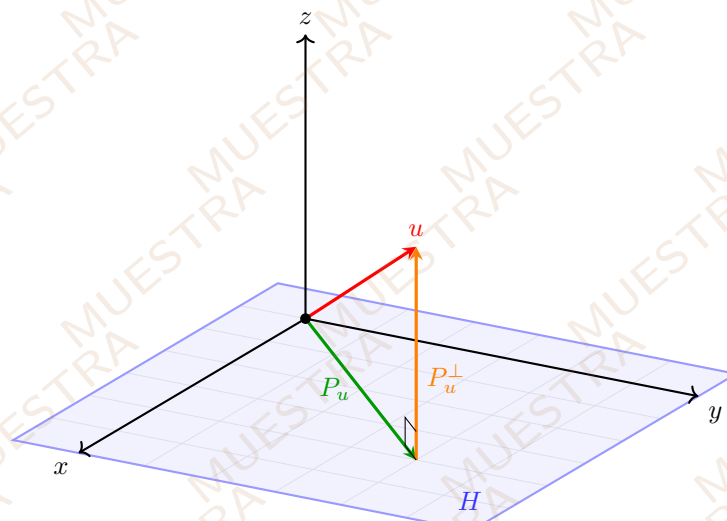
Donde:

- P_u se llama **proyección ortogonal** de u sobre H .
- $P_u^\perp$ se llama **proyección ortogonal** de u sobre $H^\perp$.

Además, definimos el **simétrico ortogonal** de u respecto de H como:

$$S_u = P_u - P_u^\perp$$

Para entender mejor esta descomposición, veamos una representación gráfica en $\mathbb{R}^3$.



d) Halla la proyección ortogonal de $w = (0, 1, 0)$ sobre Π .

$$(0, 1, 0) = \alpha(1, 4, 3) + \beta(-4, 3, -1) + \gamma(1, 2, -3)$$

Como nos pide la proyección con el plano tendríamos que sacar α y β , pero eso estaría MAL, pues se requiere en la asignatura la capacidad de analizar el problema y ver que es mucho más sencillo calcular γ y calcular la proyección como en los anteriores apartados, pese a que sean perpendiculares.

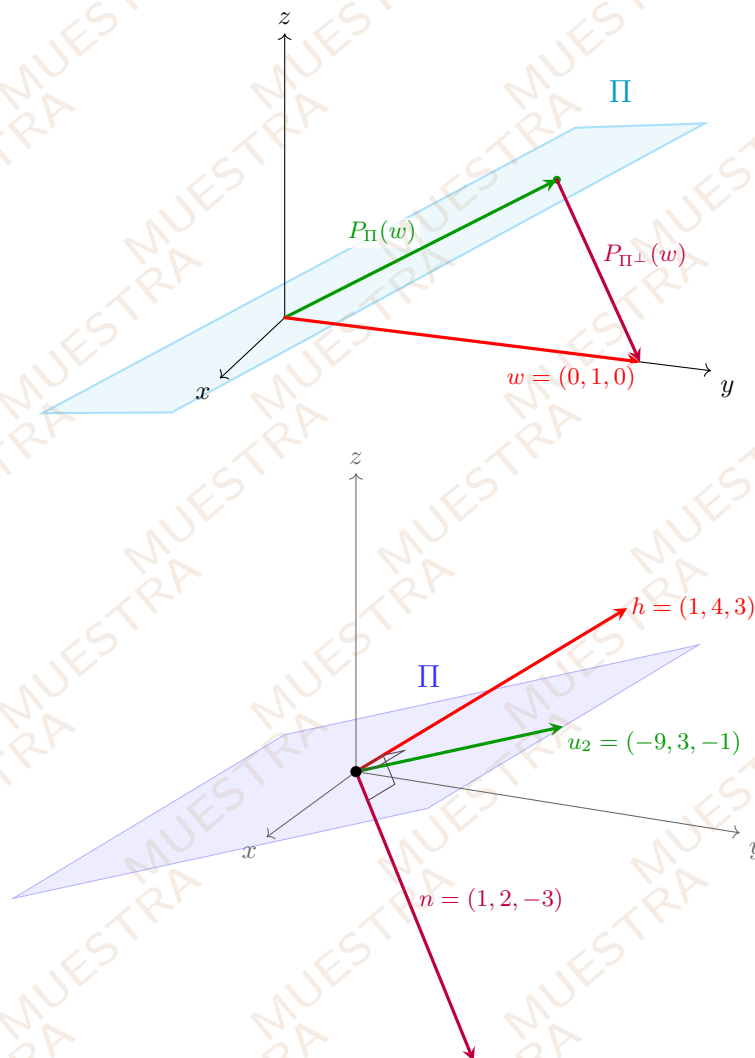
$$(0, 1, 0) = 0 + 0 + \gamma(1, 2, -3)(1, 2, -3)$$

$$\gamma = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}$$

$$P^\perp(0, 1, 0) = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right)$$

Y calculamos lo que nos piden:

$$P(0, 1, 0) = (0, 1, 0) - P^\perp(0, 1, 0) = (0, 1, 0) - \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right) = \left(-\frac{1}{7}, \frac{5}{7}, \frac{3}{7}\right)$$



2.4.3. Aplicación: Cálculo de potencias A^n

Calcular A^{100} multiplicando A por sí misma cien veces es inviable. Sin embargo, si la matriz es diagonalizable, podemos usar un "atajo".

Proposición: Fórmula de la Potencia

Sea A una matriz diagonalizable tal que $A = PDP^{-1}$. Entonces, para cualquier número natural n :

$$A^n = P \cdot D^n \cdot P^{-1}$$

Ventaja: Elevar una matriz diagonal a una potencia es trivial, ya que solo hay que elevar los elementos de la diagonal:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

Demostración (Por Inducción)

Demostraremos que $A^n = PD^nP^{-1}$ para todo $n \geq 1$.

1. **Caso base ($n = 1$):** La igualdad es trivialmente cierta por la definición de diagonalización:

$$A^1 = PD^1P^{-1} \Rightarrow A = PDP^{-1} \quad (\text{Cierto})$$

2. **Hipótesis de Inducción:** Suponemos que la fórmula es cierta para un número k :

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

3. **Paso Inductivo:** Queremos demostrar que se cumple para $k + 1$. Escribimos A^{k+1} como el producto de A^k por A :

$$A^{k+1} = A^k \cdot A$$

Sustituimos la hipótesis de inducción (A^k) y la definición de A :

$$A^{k+1} = (PD^kP^{-1}) \cdot (PDP^{-1})$$

Usamos la propiedad asociativa ($P^{-1} \cdot P = I$):

$$A^{k+1} = PD^k \underbrace{(P^{-1}P)}_I DP^{-1}$$

$$A^{k+1} = P(D^k \cdot D)P^{-1}$$

Por propiedades de potencias ($D^k \cdot D = D^{k+1}$):

$$A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$$

Conclusión: La fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

Esta demostración se ha añadido como complemento adicional, no es parte del temario.